МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

О.И. Судавная, С.В. Фролов

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

II семестр

Методическое пособие

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург

2009

Введение

Типовые расчеты по математике для студентов первого курса вечернего отделения во втором семестре содержат 2 типовых расчета по темам

- «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Неопределенный и определенный интеграл»
- «Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля»

Каждый из типовых расчетов включает 26 вариантов по пяти различным темам. Перед заданиями помещены методические указания, основные теоретические формулы и разобранные решения наиболее типичных задач.

Рекомендуемые пособия:

1. Лапин И. А., Ратафьева Л. С., Фролов В. М. Математический анализ I. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.
2. Лапин И. А., Ратафьева Л. С. Математический анализ II. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2003.

Типовой расчет по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Неопределенный и определенный интеграл»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Нахождение смешанных частных производных функции нескольких переменных и вычисление их значений в заданных точках.
II. Нахождение неопределенных интегралов простейшими методами.
III. Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям.
IV. Нахождение неопределенных интегралов от дробных рациональных функций.
V. Вычисление определенных интегралов методом замены переменной.

Образцы решения задач по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Дана функция трех переменных: $F(x, y, z) = \ln (x^2 + y^2 - z^2)$. Найдите

а) смешанную частную производную третьего порядка $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}$ данной функции;

б) значение найденной производной в точке $M(2, 1, 2)$.

Решение. При нахождении частной производной по одной из переменных все остальные переменные считаются постоянными. Отметим, что для краткости частная производная обозначается штрихом и индексом, указывающим, по какой переменной она берется. С учетом этого найдем частную производную первого порядка по переменной x, применив правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)'_x}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2 - z^2} = 2x(x^2 + y^2 - z^2)^{-1}$$

Найдем производную второго порядка $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, т. е. производную по y полученного выражения, с использованием того же правила:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2x\left((x^2 + y^2 - z^2)^{-1}\right)'_y = = 2x(-1)(x^2 + y^2 - z^2)^{-2}(x^2 + y^2 - z^2)'_y =$$

$$= -2x(x^2 + y^2 - z^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2 - z^2)^2}.$$

Найдем искомую частную производную $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}$, продифференцировав последнее выражение еще раз по y, применив правило дифференцирования дроби:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = -4x\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 - z^2)^2}\right)'_y =$$

$$= -4x\frac{(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 - z^2) \cdot 2y^2}{(x^2 + y^2 - z^2)^4} =$$

$$= -4x\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2 - z^2)^3} = -\frac{4x(x^2 - 3y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 - z^2)^3}.$$

б) Для нахождения значения полученной производной в точке M подставим в последнее выражение координаты этой точки:

$$\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right|_M = -\frac{4 \cdot 2(4 - 3 - 4)}{(4 + 1 - 4)^3} = 24.$$

Ответ: а) $-\dfrac{4x(x^2 - 3y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 - z^2)^3}$, б) 24.

2. Дана функция трех переменных:
$F(x,y,z)=\sqrt{2x+y}\cos(2x+z^2)$. Найдите

а) смешанную частную производную третьего порядка $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$ данной функции;

б) значение найденной производной в точке $M(0,\pi,\sqrt{\pi})$.

Решение. а) Поскольку в области непрерывности смешанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования, можно выбрать порядок нахождения производных по тем переменным, по которым это сделать наиболее просто.

Найдем первую частную производную данной функции по переменной z:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\sqrt{2x+y^2}\left(\cos(2x+z^2)\right)'_z=$$

$$=\sqrt{2x+y^2}\left(-\sin(2x+z^2)\right)(2x+z^2)'_z=-2z\sqrt{2x+y^2}\sin(2x+z^2)$$

Продифференцируем полученное выражение по y, т. е. найдем вторую производную $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}=-2z\sin(2x+z^2)\left(\sqrt{2x+y^2}\right)'_y=-2z\sin(2x+z^2)\frac{y}{\sqrt{2x+y^2}}=$$

$$=-2yz\frac{\sin(2x+z^2)}{\sqrt{2x+y^2}}.$$

Найдем частную производную третьего порядка $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$, продифференцировав последнее выражение по x с помощью правила дифференцирования дроби:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}=-2yz\frac{\left(\sin(2x+z^2)\right)'_x\sqrt{2x+y^2}-\sin(2x+z^2)\left(\sqrt{2x+y^2}\right)'_x}{\left(\sqrt{2x+y^2}\right)^2}=$$

$$-2yz\frac{2\cos(2x+z^2)\sqrt{2x+y^2}-\dfrac{\sin(2x+z^2)}{\sqrt{2x+y^2}}}{2x+y^2}=$$

$$=-2yz\frac{2(2x+y^2)\cos(2x+z^2)-\sin(2x+z^2)}{(2x+y^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 F}{\partial z \partial y \partial x} = -2yz \frac{2(2x + y^2)\cos(2x + z^2) - \sin(2x + z^2)}{(2x + y^2)^{3/2}}.$$

б) Для нахождения значения полученной производной в точке M подставим в последнее выражение координаты этой точки:

$$\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}\right|_M = -2\pi\sqrt{\pi}\,\frac{2\pi^2\cos\pi - \sin\pi}{\pi^3} = 4\sqrt{\pi}.$$

Ответ: а) $-2yz \dfrac{2(2x + y^2)\cos(2x + z^2) - \sin(2x + z^2)}{(2x + y^2)^{3/2}}$, б) $4\sqrt{\pi}$.

Образцы решения задач по теме «Неопределенный и определенный интеграл»

1. Найдите интеграл $\int \frac{0,5 + 2x\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель на знаменатель и применим прием «подведения под знак дифференциала»: $\frac{0,5dx}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x})$. Тогда интеграл примет вид

$$\int \frac{0,5 + 2x\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int \frac{0,5}{(1+x)\sqrt{x}}dx + \int \frac{2x\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2\int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} + 2\int \frac{xdx}{1+x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2(x - \ln|x+1|) + C$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2(x - \ln|x+1|) + C$.

2. Найдите интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пусть $u = \ln x, \quad dv = x^{-\frac{2}{3}}dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}, \quad v = 3x^{\frac{1}{3}}$.

В результате получим

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \ln x d(3x^{\frac{1}{3}}) = 3x^{\frac{1}{3}} \ln x - \int 3x^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x} =$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} \ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} \ln x - 3 \cdot 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} \ln x - 9\sqrt[3]{x} + C$$

Ответ: $3\sqrt[3]{x} \ln x - 9\sqrt[3]{x} + C$.

3. Найдите интеграл $\int \frac{-x^4 + 8x + 16}{x^3(x^2+4)}dx$.

Решение. Через $R(x)$ обозначим дробную рациональную функцию, стоящую под интегралом: $R(x) = \frac{-x^4 + 8x + 16}{x^3(x^2+4)}$ (*).

Представим дробную рациональную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Mx+N}{x^2+4} =$$

$$= \frac{Ax^2(x^2+4) + Bx(x^2+4) + C(x^2+4) + (Mx+N)x^3}{x^3(x^2+4)} =$$

$$= \frac{Ax^4 + 4Ax^2 + Bx^3 + 4Bx + Cx^2 + 4C + Mx^4 + Nx^3}{x^3(x^2+4)} \quad (**)$$

Для нахождения *A*, *B*, *C*, *M*, *N* приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x* в числителях выражений (*) и (**).

x^4	$A+M = -1$
x^3	$B + N = 0$
x^2	$4A + C = 0$
x^1	$4B = 8$
x^0	$4C = 16$

Получили систему пяти уравнений с пятью неизвестными

$$\begin{cases} A+M=-1 \\ B+N=0 \\ 4A+C=0 \\ 4B=8 \\ 4C=16 \end{cases},$$ которую решим, «двигаясь снизу вверх»:

$$\begin{cases} C=4 \\ B=2 \\ A=-0,25C=-1. \\ N=-B=-2 \\ M=-1-A=0 \end{cases}$$

Подставим в выражение дробной рациональной функции найденные значения коэффициентов:

$$R(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2+4}.$$

Найдем интеграл $\int R(x)dx$:

$$\int R(x)dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int x^{-2}dx+4\int x^{-3}dx-2\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Ответ: $-\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Для нахождения интеграла применим метод замены переменной. Пусть $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\, dt$, $t = \arcsin(x/2)$. Новые пределы интегрирования найдем по таблице

x	1	$\sqrt{3}$
$t = \arcsin(x/2)$	$\pi/6$	$\pi/3$

С учетом того, что $t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$, получим

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t.$$

Интеграл примет вид

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(8\sin^3 t+1)2\cos t dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(8\sin^3 t+1)dt}{4\sin^2 t} =$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin t dt + \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin^2 t} = -2\cos t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{4}\mathrm{ctg}t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{6}-1$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{6}-1$.

Замечание. При замене переменной в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к исходной переменной. При этом не следует забывать изменять пределы интегрирования по формуле $t=\phi(x)$, выражающей новую переменную через старую.

Расчетные задания

I. Дана функция трех переменных $F(x, y, z)$.
Найдите а) указанную в задаче смешанную частную производную третьего порядка функции $F(x, y, z)$, б) значение найденной производной в заданной точке M.

1. $F(x,y,z)=z^2e^{xy-z^2}$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(1/2,\ 1/2, 1/2\right)$

2. $F(x,y,z)=z\sin(xy+z)$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial z^2}$; б) $M\left(1/2,\ 2, -1\right)$

3. $F(x,y,z)=x\cos(yz+x)$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}$; б) $M\left(1,\ -2, 1/2\right)$

4. $F(x,y,z)=\ln(z^2-xy)$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(5,\ 3, 4\right)$

5. $F(x,y,z)=\frac{\sqrt{xz+y^2}}{x}$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(-7,\ 4, 1\right)$

6. $F(x,y,z)=y\sqrt{x^2+yz}$; а) $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(2,\ -1, 3\right)$

7. $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{arctg}(xz)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial y\partial z^2}$; б) $M\left(2\sqrt{2},\ -1,-1\right)$

8. $F(x,y,z)=z^2\operatorname{tg}(x^2+y^2)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2},\dfrac{1}{4}\right)$

9. $F(x,y,z)=\arcsin\dfrac{xy}{z}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(2,\sqrt{3},4\right)$

10. $F(x,y,z)=\sqrt{x}e^{\sqrt{y+z}}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(\dfrac{1}{16},2,2\right)$

11. $F(x,y,z)=\dfrac{\sin(xz-y)}{\sqrt{y}}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}$; б) $M\left(2,4,2\right)$

12. $F(x,y,z)=\dfrac{\cos(xy+z)}{\sqrt{z}}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial z}$; б) $M\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$

13. $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}$; б) $M\left(-1,1,1\right)$

14. $F(x,y,z)=\operatorname{tg}(yz+x^2)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}$; б) $M\left(1,-1,1\right)$

15. $F(x,y,z)=2y\sqrt{y}\arcsin\sqrt{xz}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(3/2,3,1/2\right)$

16. $F(x,y,z)=2x\sqrt{x}\ln(y^2+z^2)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}$; б) $M\left(25,1,2\right)$

17. $F(x,y,z)=y\sin(xz-y)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial z}$; б) $M\left(-1/2,\ 1,-2\right)$

18. $F(x,y,z)=\ln(x^2+yz)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(1/2,\ -3,-1/4\right)$

19. $F(x,y,z)=z\sqrt{y^2+xz}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(3,\ 2,-1\right)$

20. $F(x,y,z)=2y\sqrt{y}\operatorname{tg}(x^2+z^2)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\dfrac{1}{16},\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$

21. $F(x,y,z)=z^{xy}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M(1/10,10,e)$

22. $F(x,y,z)=\dfrac{e^{x\sqrt{y}}}{y\sqrt{z}}$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M(0,4,1/4)$

23. $F(x,y,z)=\sqrt{x}\cos(\sqrt{y}+\sqrt{z})$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}$; б) $M\left(9,\dfrac{\pi^2}{4},\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

24. $F(x,y,z)=\operatorname{tg}(xy-z^2)$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial z}$; б) $M(1,1,1)$

25. $F(x,y,z)=(xy)^z$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M(\sqrt{e},\sqrt{e},1)$

26. $F(x,y,z)=(x^2+z^2)^y$; а) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}$; б) $M\left(\sqrt{\dfrac{e}{2}},1,\sqrt{\dfrac{e}{2}}\right)$

II. Найдите неопределенные интегралы

1. $\displaystyle\int\frac{3\sqrt{x-x^2}+2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. $\displaystyle\int\frac{2x+3\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}dx$

3. $\displaystyle\int\frac{3\ln^2 x+4\sqrt[5]{x^4}}{x}dx$

4. $\displaystyle\int\frac{\cos 4x dx}{\cos^2 2x\sin^2 2x}$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 0{,}5x\cos^2 0{,}5x}$

6. $\displaystyle\int\frac{3x-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7. $\displaystyle\int\frac{\cos\sqrt{x}+2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

8. $\displaystyle\int 3\sqrt{x}(1+e^{x\sqrt{x}})dx$

9. $\displaystyle\int\frac{2x\sqrt[3]{4-3x}+1}{\sqrt[3]{4-3x}}dx$

10. $\displaystyle\int\frac{3\sqrt{2x^2+3x+1}}{\sqrt{2x+3}}dx$

11. $\int \frac{1+3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}-10x^2}{2\sqrt{x}}dx$

13. $\int \frac{5x\sqrt[3]{x^2}-2\ln x}{x}dx$

14. $\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 0,5x \sin^2 0,5x}$

15. $\int x(2\cos x^2+7\sqrt[3]{x})dx$

16. $\int 3\sqrt{x}(x\sqrt{x}+\sin x\sqrt{x})dx$

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}$

18. $\int \frac{x^2-2\mathrm{arctg}x}{x^2+1}dx$

19. $\int \frac{e^{\arcsin x}-3\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

20. $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$

21. $\int \frac{\sqrt{3-2x}-2}{3-2x}dx$

22. $\int \frac{4x^2-1+4\ln(2x+1)}{2x+1}dx$

23. $\int \frac{e^{\mathrm{arc\,ctg}x}+2x+1}{x^2+1}dx$

24. $\int \frac{\cos^3 x+e^{\mathrm{tg}x}+1}{\cos^2 x}dx$

25. $\int \frac{-3\sqrt{\mathrm{ctg}x}+2\sin^3 x\cos x}{\sin^2 x}dx$

26. $\int \frac{2x-e^{x^2}\cos x}{e^{x^2}}dx$

III. Найдите неопределенные интегралы

1. $\int \mathrm{arctg}x dx$

2. $\int \arcsin x dx$

3. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

4. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

5. $\int \ln(x^2+1)dx$

6. $\int x^2 e^x dx$

7. $\int x\mathrm{arctg}x dx$

8. $\int x\cos\pi x dx$

9. $\int x\sin\frac{x}{\pi}dx$

10. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

11. $\int x5^x dx$

12. $\int \ln^2 x dx$

13. $\int x\cos 0,5xdx$

14. $\int x^2 e^{-x} dx$

15. $\int \ln(1-2x)dx$

16. $\int \arcsin 2xdx$

17. $\int \operatorname{arc\,tg} 0,5xdx$

18. $\int x\sin 2xdx$

19. $\int xe^{2-x} dx$

20. $\int (5x-1)\cos xdx$

21. $\int (2-3x)\sin xdx$

22. $\int (5x-1)\cos xdx$

23. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

24. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

25. $\int (3x^2+2x)\ln xdx$

26. $\int x\ln(1-x)dx$

IV. Найдите неопределенные интегралы

1. $\int \frac{(3x^2-5)dx}{(x^2+x+1)(x-2)}$

2. $\int \frac{(-x^2+15x-32)dx}{(x^2-6x+9)(x+1)}$

3. $\int \frac{(3x^2-2x-2)dx}{x^3+1}$

4. $\int \frac{(2x^2-21x+24)dx}{(x^2-6x+8)(x+3)}$

5. $\int \frac{(2x^2+3x+9)dx}{(x+2)^3}$

6. $\int \frac{(-5x^2-4x+7)dx}{(x^2-x-6)(x+2)}$

7. $\int \frac{(2x^2+x+31)dx}{(x^2-4x+13)(x-7)}$

8. $\int \frac{(3x^2-19x-45)dx}{(x^2+6x+10)(x-5)}$

9. $\int \frac{(x^2+4x+6)dx}{(x+3)^3}$

10. $\int \frac{(6x^2-7x+5)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}$

11. $\int \frac{(-2x^2+25x-53)dx}{(x-3x-4)(x-7)}$

12. $\int \frac{(-x^2+18x-37)dx}{(x^2+x-6)(x-2)}$

13. $\int \frac{(x^2-7x+52)dx}{(x^2-3x-10)(x-3)}$

14. $\int \frac{(-2x^2+19x+45)dx}{(x^2-2x-3)(x+4)}$

15. $\int \frac{(x^2+15x+20)dx}{(x^2+x-2)(x+2)}$

16. $\int \frac{(3x^2+34x-18)dx}{(x^2-6x+13)(x+4)}$

17. $\int \frac{(x^2-11x-17)dx}{(x^2+4x+20)(x-3)}$

18. $\int \frac{3(2x^2-3x-37)dx}{(x^2+x-12)(x+3)}$

19. $\int \frac{2(3x^2+14x+1)dx}{(x^2+x-12)(x+2)}$

20. $\int \frac{(x^2-11x+30)dx}{(x-4)^3}$

21. $\int \frac{(x^2+3)dx}{(x^2-2x+5)(x-1)}$

22. $\int \frac{3dx}{x^2(x-1)}$

23. $\int \frac{(3x^2-x+5)dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

24. $\int \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)}$

25. $\int \frac{(x^2-5)dx}{x(x^2+4x+5)}$

26. $\int \frac{(x^2+3)dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

V. Вычислите определенные интегралы

1. $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\sqrt[3]{x}}$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3. $\int\limits_1^{9} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{7x+1}}$

4. $\int\limits_6^{11} \frac{xdx}{(x-1)\sqrt{x-2}}$

5. $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x^2})\sqrt[4]{x}}$

6. $\int\limits_4^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$

7. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}dx}{e^x+3}$

8. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$

9. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

10. $\int\limits_0^{2} x^2\sqrt{8-x^2}dx$

11. $\int\limits_3^{66} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-2}}$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+1}$

13. $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

14. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{3-x}}$

15. $\int\limits_0^{\ln x} \sqrt{e^x-1}dx$

16. $\int\limits_0^{9} x^2\sqrt{9-x^2}dx$

17. $\int\limits_{0,4}^{13} \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{(5x-1)^2}}$

18. $\int\limits_2^{5} \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx$

19. $\int\limits_2^{4} \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-1}}$

20. $\int\limits_2^{17} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}}$

21. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

22. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$

23. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

24. $\int\limits_0^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

25. $\int\limits_0^{8} \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

26. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}xdx}{1+\sin^2 x}$