

Лабораторная работа №4 по вычислительной математике для групп 1508, 1707.  
Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами.

Дана система линейных алгебраических уравнений  $n$ -го ( $n \geq 2$ ) порядка

$$AX = B, \quad (*)$$

где  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$  — матрица коэффициентов системы,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  — столбец свободных членов,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — столбец неизвестных. Известно, что  $A$  является матрицей с диагональным преобладанием. Пусть  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  — решение системы (\*).

**4.1** Написать программу для нахождения  $k$ -го приближения  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$  решения  $C$  системы (\*) методом Якоби. В качестве нулевого приближения  $X^{(0)}$  взять столбец  $(b_1/a_{11}, b_2/a_{22}, \dots, b_n/a_{nn})^T$ . Вычислить абсолютную погрешность  $\Delta$  приближения  $X^{(k)}$  по формуле  $\Delta = \|C - X^{(k)}\|_\infty$ . На основе этой программы написать вторую, решающую ту же задачу методом Зейделя. Обе программы должны выводить компоненты вектора  $X^{(k)}$  с точностью не менее 8 знаков после запятой, а число  $\Delta$  должно быть выведено в экспоненциальной форме. Исходные данные необходимо извлечь из текстового файла in.txt, а результаты работы программы требуется поместить в текстовый файл out.txt. Файлы in.txt и out.txt должны размещаться в директории исполняемого файла.

Построчное описание содержимого файла in.txt	Построчное описание содержимого файла out.txt
$n$	$x_1^{(k)}$
$a_{11} \text{ <пр> } a_{12} \text{ <пр> } \dots \text{ <пр> } a_{1n} \text{ <пр> } b_1 \text{ <пр> } c_1$	$x_2^{(k)}$
$a_{21} \text{ <пр> } a_{22} \text{ <пр> } \dots \text{ <пр> } a_{2n} \text{ <пр> } b_2 \text{ <пр> } c_2$	$\dots$
$\dots$	$x_n^{(k)}$
$a_{n1} \text{ <пр> } a_{n2} \text{ <пр> } \dots \text{ <пр> } a_{nn} \text{ <пр> } b_n \text{ <пр> } c_n$	“delta=” $\Delta$
$k$	

Примечания: <пр> означает «пробел». Строка, заключённая в кавычки, выводится в файл без изменений (но без кавычек).

**Пример.** Найти 10-е приближение решения системы линейных алгебраических уравнений 4-го порядка

$$\begin{cases} 2,3x_1 - 0,4x_2 + 1,1x_3 + 0,7x_4 = 7,6 \\ 3x_1 + 7,2x_2 + 1,3x_3 + 2,4x_4 = 30,9 \\ -2,5x_1 - 1,2x_2 - 4,9x_3 + 0,8x_4 = -16,4 \\ -0,5x_1 - 2,9x_2 - 1,8x_3 - 5,8x_4 = -34,9 \end{cases}$$

итерационным методом и вычислить абсолютную погрешность этого приближения, если известно, что точное решение этой системы равно  $(1; 2; 3; 4)$ .

Этому заданию соответствует следующее содержимое файлов in.txt и out.txt:

Содержимое файла in.txt	out.txt (метод Якоби)	out.txt (метод Зейделя)
4	1.03411288	0.99999997
2.3    -0.4    1.1    0.7    7.6    1	2.05484027	2.00000000
3       7.2    1.3    2.4    30.9   2	3.02714259	3.00000001
-2.5   -1.2   -4.9   0.8   -16.4   3	4.05595928	4.00000000
-0.5   -2.9   -1.8   -5.8   -34.9   4	delta=5.595928e-002	delta=3.395213e-008
10		

**4.2** Написать программу для нахождения приближённого решения системы (\*) с абсолютной погрешностью, не превышающей  $\varepsilon$ . Приближённое решение должно быть найдено методом Якоби как  $k$ -й член последовательности векторов  $X^{(0)} = F$ ,  $X^{(m+1)} = DX^{(m)} + F$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , где  $D$  и  $F$  — матрица и вектор соответственно, полученные из  $A$  и  $B$  в соответствии с методом Якоби, а  $k$  — наименьшее целое решение неравенства  $\Delta_k \leq \varepsilon$ , где  $\Delta_k = \frac{\|D\|_\infty}{1 - \|D\|_\infty} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_\infty$ .

Вычислить прогнозируемое число итераций  $k_{\text{prog}}$  как наименьшее целое решение неравенства  $\frac{\|D\|_\infty^k}{1 - \|D\|_\infty} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Вычислить абсолютную погрешность  $\Delta$  приближения  $X^{(k)}$  по формуле  $\Delta = \|C - X^{(k)}\|_\infty$ . На основе этой программы написать вторую, решающую ту же задачу методом Зейделя. Обе программы должны выводить компоненты вектора  $X^{(k)}$  с точностью не менее 8 знаков после запятой, а числа  $\Delta$  и  $\Delta_k$  должны быть выведены в экспоненциальной форме. Исходные данные необходимо извлечь из текстового файла in.txt, а результаты работы программы требуется поместить в текстовый файл out.txt. Файлы in.txt и out.txt должны размещаться в директории исполняемого файла.

Построчное описание содержимого файла in.txt	Построчное описание содержимого файла out.txt
$n$	$x_1^{(k)}$
$a_{11} \langle \text{пр} \rangle a_{12} \langle \text{пр} \rangle \dots \langle \text{пр} \rangle a_{1n} \langle \text{пр} \rangle b_1 \langle \text{пр} \rangle c_1$	$x_2^{(k)}$
$a_{21} \langle \text{пр} \rangle a_{22} \langle \text{пр} \rangle \dots \langle \text{пр} \rangle a_{2n} \langle \text{пр} \rangle b_2 \langle \text{пр} \rangle c_2$	$\dots$
$\dots$	$x_n^{(k)}$
$a_{n1} \langle \text{пр} \rangle a_{n2} \langle \text{пр} \rangle \dots \langle \text{пр} \rangle a_{nn} \langle \text{пр} \rangle b_n \langle \text{пр} \rangle c_n$	“k_prog=” $k_{\text{prog}}$
$\varepsilon$	“k=” $k$
	“delta_k=” $\Delta_k$
	“delta=” $\Delta$

Примечания:  $\langle \text{пр} \rangle$  означает «пробел». Строки, заключённые в кавычки, выводятся в файл без изменений (но без кавычек).

**Пример.** Найти приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений 4-го порядка

$$\begin{cases} 25,3x_1 + 8x_2 + 7,4x_3 + 6,2x_4 = 14,49 \\ -11x_1 - 45x_2 - 17,7x_3 - 5,9x_4 = -212,19 \\ 2,35x_1 - 5,6x_2 - 13,8x_3 + 3,3x_4 = -104,025 \\ -2,9x_1 - 4,1x_2 - 6,6x_3 + 18,1x_4 = 34,89 \end{cases}$$

итерационным методом с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.001; вычислить прогнозируемое и реальное число итераций, обеспечивающих эту погрешность, получить оценку абсолютной погрешности приближения и вычислить саму погрешность, если известно, что точное решение этой системы равно  $(-3,3; 2,1; 7,2; 4,5)$ .

Этому заданию соответствует следующее содержимое файлов in.txt и out.txt:

Содержимое файла in.txt	out.txt (метод Якоби)	out.txt (метод Зейделя)
4	-3.29998841	-3.30000965
25.3    8        7.4        6.2        14.49        -3.3	2.10001804	2.10001848
-11     -45     -17.7    -5.9     -212.19     2.1	7.20002662	7.19998981
2.35    -5.6    -13.8    3.3     -104.025    7.2	4.49996850	4.49999892
-2.9    -4.1    -6.6    18.1    34.89       4.5	k_prog=65	k_prog=65
0.001	k=16	k=9
	delta_k=5.583115e-004	delta_k=3.035450e-004
	delta=3.150091e-005	delta=1.847524e-005